Prüfungsvorbereitung: Wiederholung Lineare Gleichungssysteme

1. Lineare Gleichungssysteme

Lineare Gleichungssysteme bestehen aus **2 Gleichungen** mit jeweils **2 Variablen**. Im Koordinatensystem kann man im Schnittpunkt der beiden Graden die Lösung erkennen, die für beide Gleichungen zutrifft. Diese Gleichungssysteme haben einen großen praktischen Nutzen, wenn man verschiedene Dinge miteinander vergleichen möchte.

Beispiel 1:

Franz möchte am Wochenende einen Umzugswagen mieten und hat 2 Angebote eingeholt.
Angebot 1: 170 € Grundpreis, jeder weiter Kilometer kostet 0,80 €/km
Angebot 2: 50 € Grundpreis, dafür aber kostet jeder Kilometer 1,20 €/km
Franz muss insgesamt 360 km fahren und will wissen, welches Angebot für ihn günstiger ist.
Nun stellen wir für beide Fälle eine Gleichung auf: y ist der Preis, x sind die Kilometer

Angebot A: $y = 0{,}8x + 170$

Angebot B: $y = 1{,}2x + 50$

Zuerst der zeichnerische Lösungsweg:

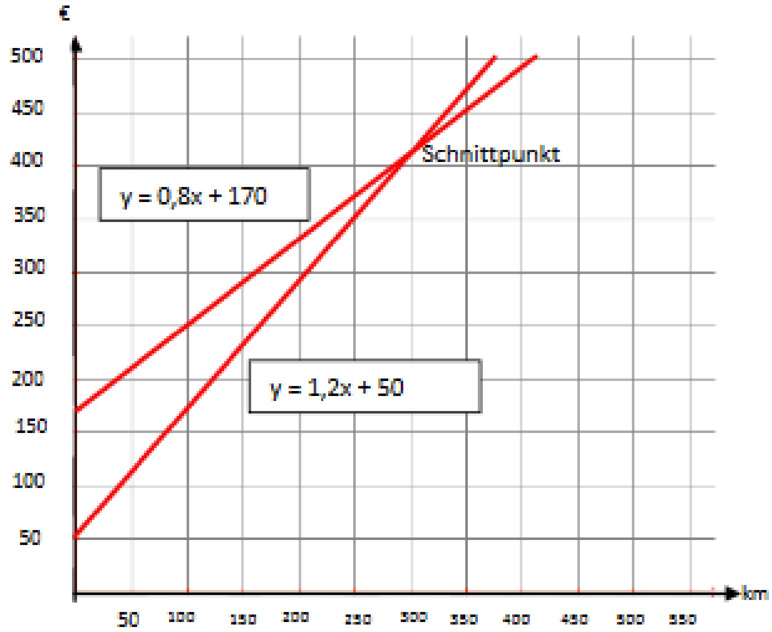
Um eine Gerade zu zeichnen, benötigt man lediglich 2 Punkte

Wertetabelle Angebot A

x	0	200
y	170	330

Wertetabelle Angebot B

x	0	200
y	50	290



Der Schnittpunkt der Graden zeigt den Punkt, an dem beide Angebote gleich viel kosten.

Nun die rechnerische Lösung:

In dem wir die beiden Gleichungen gleichsetzen und zuerst x und dann y ausrechnen, erhalten wir als Lösung den Punkt, bei dem beide Angebote gleich viel kosten

$$0{,}8x + 170 = 1{,}2x + 50$$
$$120 = 0{,}4x$$
$$300 = x$$

Da der X Wert jetzt bekannt ist, können wir für das x in einer der beiden Gleichungen diesen Wert einsetzen und dadurch den dazugehörigen Y Wert ermitteln.

$$Y = 0{,}8x + 170$$
$$Y = 0{,}8 \cdot 300 + 170$$
$$Y = 410$$

Lösungssatz: Bei 300 Kilometern kosten beide Angebote gleich viel, nämlich 410 €.
Weil Franz 360 Km fahren muss, ist das Angebot A für ihn günstiger.

2) Lösungsverfahren bei linearen Gleichungssystemen.

Aufgabe: In einem Stall leben 26 Tiere, Schafe (x) und Hühner (y)mit insgesamt mit 90 Beinen. Wie viele Schafe und Hühner sind es?

Bei linearen Gleichungssystemen stehen uns grundsätzlich 4 Verfahren zur Verfügung.

1. zeichnerische Verfahren
2. Gleichsetzungsverfahren
3. Einsetzungsverfahren
4. Additionsverfahren

In dem Gleichungssystem mit den Hühnern und Schafen sollen beispielhaft alle 4 Lösungsverfahren gezeigt werden.

Schritt 1: aus dem Text heraus die Variablen identifizieren. Es sind die Schafe und die Hühner und wir geben ihnen die Variablen x und y.
Wir wissen, dass x Schafe und y Hühner 26 Tiere ergeben. Daraus folgt Gleichung 1: $x + y = 26$.
Wir wissen, dass Schafe 4 und Hühner 2 Beine haben. Daraus folgt Gleichung 2: $4x + 2y = 90$
Gleichung 1: $x + y = 26$ **Gleichung 2:** $4x + 2y = 90$

Schritt 2: Im zweiten Schritt muss man sich für eines der 4 möglichen Lösungsverfahren entscheiden. Wir beginnen in diesem Beispiel mit dem zeichnerischen Verfahren.

2.1) zeichnerisches Lösungsverfahren:

Um einen Graphen zeichnen zu können, müssen beide Gleichungen in die Normalform ($y = mx + b$) gebracht werden. Denn wir brauchen zum Zeichnen den Schnittpunkt mit der y- Achse und die Steigung m.

Durch Umformung erhält man:

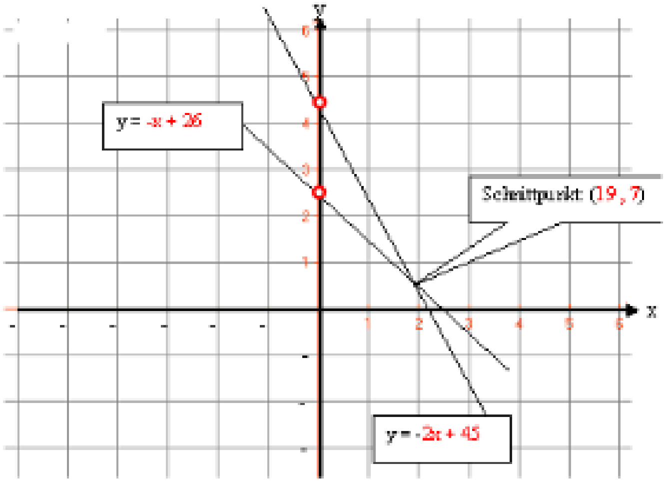
Gleichung 1: $x + y = + 26$

$\boxed{y = -x + 26}$

Gleichung 2: $4x + 2y = 90$

$2y = -4x + 90$

$\boxed{y = -2x + 45}$



Nach der Umformung können wir sofort erkennen, dass die Gerade der ersten Gleichung negativ ist, die Y- Achse bei 26 schneidet und die Steigung -1 hat.
Die Gerade der zweiten Gleichung hat die Steigung (-2), ist auch negativ und schneidet die Y- Achse bei 45.

Um die Geraden zeichnen zu können, legen wir für beide Geraden eine Wertetabelle mit jeweils mindestens 2 -3 Wertepaaren an. Wir setzen für x drei beliebe Zahlen in beide Gleichungen ein und errechnen damit die dazugehörigen y-Werte. Einer der x-Werte sollte dabei immer 0 sein.

Wertetabelle 1:

x	0	20	30
y	26	6	-4

Wertetabelle 2:

x	0	20	30
y	45	5	-15

Den Schnittpunkt, (und damit die Lösung) können wir nach dem Zeichnen der Geraden direkt ablesen.

2.2) Gleichsetzungsverfahren:

Das Gleichsetzungsverfahren bietet sich für Gleichungen an, bei denen die x oder y Werte bereits alleine auf einer Seite stehen. Um das Gleichungssystem zu lösen, versuchen wir bei allen rechnerischen Verfahren mit Hilfe kleiner Tricks zuerst die eine Variable auszublenden.

Gleichung 1: $y = -x + 26$ **Gleichung 2:** $y = -2x + 45$

Beim Schnittpunkt der beiden Geraden muss der jeweilige y-Wert gleich sein. Daraus folgt:

y = y oder $-x + 26 = -2x + 45$ Mit diesem Trick haben wir das y verschwinden lassen und können jetzt erst einmal in Ruhe den x Wert ausrechen.

$$
\begin{aligned}
-x + 26 &= -2x + 45 && | +2x \\
x + 26 &= 45 && | -26 \\
x &= 19
\end{aligned}
$$

Um y auszurechnen, brauchen wir nur noch den errechneten x Wert in eine der beiden Gleichungen einzusetzen.

$$
\begin{aligned}
y &= -x + 26 \\
y &= -19 + 26 = 7
\end{aligned}
$$

2.3) Einsetzungsverfahren:

Dieses Verfahren würde sich anbieten, wenn wir die beiden Beispielsgleichungen nicht in die Normalform umgeformt hätten. Auch hier wieder ein kleiner Trick, um eine Variable auszublenden. Bei diesem Verfahren wird dazu zuerst ein x oder ein y Wert freigestellt.

Gleichung 1: $x + y = 26$ **Gleichung 2:** $4x + 2y = 90$

Gleichung 1 bietet sich für eine Freistellung von x an.

$$
\begin{aligned}
x + y &= 26 && | -y \\
x &= 26 - y
\end{aligned}
$$

Im nächsten Schritt ersetzen wir nun das x in der zweiten Gleichung durch 26-y

$$
\begin{aligned}
4x + 2y &= 90 \\
4(26-y) + 2y &= 90 && | \text{ausklammern} \\
104 - 4y + 2y &= 90 && | \text{ordnen} \\
104 - 2y &= 90 && | -90 \\
14 - 2y &= 0 && | +2y \\
14 &= 2y && | :2 \\
7 &= y
\end{aligned}
$$

Im letzten Schritt braucht nur noch der errechnete y Wert in eine Gleichung eingesetzt werden um den x Wert zu bestimmen: $x + 7 = 26$

$$x = 19$$

Das Additionssverfahren ist nur zur Information.

Prüfungsvorbereitung: Wiederholung Lineare Gleichungssysteme

2.4) Additionsverfahren:

Beim Additionsverfahren kommt ein neuer Trick zur Anwendung. Die Gleichungen werden nach einer eventuell notwendigen kleinen Veränderung so addiert, dass entweder x oder y im ersten Schritt weg-fällt. Betrachten wir die Schafe/Hühner- Gleichungen:

Gleichung 1: $x + y = 26$ **Gleichung 2:** $4x + 2y = 90$

$$\begin{array}{rcl} x + y & = & 26 \\ + \underline{4x + 2y} & \underline{=} & \underline{90} \\ 5x + 3y & = & 116 \end{array}$$

Beide Gleichungen werden addiert

Eine einfache Addition bringt hier nichts. Wir wissen zwar jetzt, dass $5x + 3y = 116$ ist, haben aber immer noch 2 Variablen. Deshalb formen wir die erste Gleichung so um, dass nach einer Addition eine Unbekannte verschwindet:

$$\begin{array}{rcll} x + y & = & 26 & \cdot \mid (-2) \\ -2x - 2y & = & -52 & \end{array}$$

Wenn wir jetzt die beiden Gleichungen addieren, verschwindet wie durch Zauberei das y.

$$\begin{array}{rcl} -2x - 2y & = & -52 \\ + \underline{4x + 2y} & \underline{=} & \underline{90} \\ 2x + 0 & = & 38 \end{array}$$

beide Gleichungen werden addiert

und wir können den x- Wert ausrechnen.

$$\begin{array}{rcll} 2x + 0 & = & 38 & \mid :2 \\ x & = & 19 & \end{array}$$

Im letzten Schritt braucht nur noch der errechnete x Wert in eine der beiden Gleichungen eingesetzt werden, um den y Wert zu bestimmen:

$$\begin{array}{ll} x + y = 26 & \\ 19 + y = 26 & \mid -19 \\ y = 7 & \end{array}$$

Grundsätzlich können alle linearen Gleichungssysteme mit nur einem Verfahren gelöst werden. Es ist aber dennoch sinnvoll, alle Verfahren zu beherrschen, da so viel Rechenzeit gespart und Fehler vermieden werden können.

Prüfungsvorbereitung: Wiederholung Lineare Gleichungssysteme

Übungsaufgaben:

1. 2012/2013

Gegeben ist das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{array}{ll} \mathbf{I} & 2y = -3x + 4 \\ \mathbf{II} & y = \frac{1}{2}x - 2 \end{array}$$

a) Lösen Sie das Gleichungssystem rechnerisch. Geben Sie die Lösungsmenge an.

b) Durch die Gleichungen **I** und **II** sind lineare Funktionen gegeben.
- Stellen Sie die beiden Graphen der Funktionen in ein und demselben Koordinatensystem dar.
- Geben Sie die Koordinaten des Schnittpunktes S der beiden Graphen an.

c) Gegeben ist ein weiteres Gleichungssystem.

$$\begin{array}{ll} \mathbf{I} & y = 3x + 4 \\ \mathbf{II} & y = mx + n \end{array}$$

Geben Sie je einen Wert für m und n an, sodass dieses Gleichungssystem keine Lösung besitzt.

2. 2014/2015

a) Gegeben ist die Gleichung.

$$4x - (2 + 9x) = 15x - 27$$

- Lösen Sie die Gleichung im Bereich der rationalen Zahlen.
- Geben Sie die Lösungsmenge der Gleichung für den Bereich der natürlichen Zahlen an.

b) Geben Sie eine negative ganze Zahl an, die Lösung der Ungleichung ist.

$$-5 < 3x + 10$$

c) Lösen Sie das Gleichungssystem. Führen Sie die Probe durch.

$$\begin{array}{lrcl} \text{I} & 5x + 12 & = & 9y \\ \text{II} & 5x & = & 9 + 2y \end{array}$$

<u>Prüfungsvorbereitung: Wiederholung Lineare Gleichungssysteme</u>

3. 2017/2018

Gleichungssysteme kann man auf unterschiedliche Art lösen.

a) Lösen Sie das Gleichungssystem grafisch und geben Sie die Lösung an.

I $\quad y = 2x - 3$

II $\quad y = -\frac{1}{2}x + 2$

b) Lösen Sie das folgende Gleichungssystem rechnerisch. Führen Sie die Probe durch.

I $\quad 2x - 4y = 28$

II $\quad 4x - y = 0$

c) Ein weiteres Gleichungssystem ist gegeben.

I $\quad 5x + y = 3$

II $\quad y = mx + 2,5$

Geben Sie den Wert für m so an, dass das Gleichungssystem keine Lösung hat.